ДИС 13.11.12

Зад
Покажете че за $\forall x>0$ $\exists$ единствено $y>0$ т.че $y^n = x$ $(x,y \in \mathbb{R})$. Означаване y с $\sqrt[n]{x}$

Док-во
Образуване множеството за $\forall x>0$
$M_x = \{ t \in \mathbb{R} \mid t>0, t^n < x \}$ $n>1$, $n \in \mathbb{N}$

1) Ще докажем че $M_x \neq \emptyset$
2) M_x е ограничено отгоре
3) $(\sup M_x)^n = x$ $\quad \frac{x}{x+1} \in M_x$

Трябва да докажем
$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^n < x \Leftrightarrow x^n < x(x+1)^n \Rightarrow x^{n-1} < (x+1)^n$$

при $n=2$ $x < (x+1)^2 \Rightarrow x < x^2+2x+1$
или $0 < x^2+x+1$ за $\forall x$
нека $x^{k-1} < (x+1)^k$

1) $\frac{x}{x+1} \in M_x$ $\quad a<b \mid c<d \Rightarrow ac<bc$ $(c>0)$

2) M_x е ограничено от $1+x$ - горна граница
Трябва да докажем $t \in M_x$ то $t < 1+x$
т.е. ако $t^n < x$ то $\Rightarrow t^n < 1+x \Rightarrow$
$t^n < (1+x)^n \Rightarrow t < 1+x$

3) Съгласно принципа за непрекъснатост (A14) $\exists \sup M_x$. Нека $\alpha = \sup M_x$. Ще докажем че $\alpha^n = x$

Ще допуснем $\alpha^n > x$ - до противоречие
после допускаме $\alpha^n < x$ - до противоречие
от което следва $\alpha^n = x$

Допускаме $\alpha^n > x$. Ще докажем че $\exists\, \beta < \alpha$
т.е. $t \in M_x$ то $t < \beta$. Търсим β във вида
$\beta = \alpha - \varepsilon$ за $\varepsilon > 0$

$t^n < x$. Ако намерим ε така че да е
изпълнено $t^n < x < (\alpha-\varepsilon)^n$ то сме
доказали че ако $t \in M_x$ то $t < \alpha - \varepsilon$

Тъждество
$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}a + b)$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad . \quad q^n - 1 \text{ се дели на } q-1$$

	1	0	0	1
1	1	1	1	0

$$q^{n-1} = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} \dots q + 1) \quad ?$$

Нека $a > b$
$$a^n - b^n < (a-b)(a^{n-1} + \dots + a^{n-1}) = n(a-b)a^{n-1}$$

при $a = \alpha$, $b = \alpha - \varepsilon$
$$\alpha^n - (\alpha-\varepsilon)^n < (\alpha - \alpha + \varepsilon)\, n\, \alpha^{n-1} \Rightarrow$$

$$\alpha^n - \varepsilon n \alpha^{n-1} < (\alpha-\varepsilon)^n$$

Избираме ε т.ч. $\alpha^n - \varepsilon n\alpha^{n-1} > x$

еквивалентно на $\frac{\alpha^n - x}{n\alpha^{n-1}} > \varepsilon$

Нека допуснем $\alpha^n < x$. Ще докажем че α не е горна граница т.е.
$\exists\, t \in M_x$ т.ч. $\alpha < t$

Търсим t във вида

$t = \alpha + \varepsilon \qquad \varepsilon > 0$

$t^n < x \quad , (\alpha+\varepsilon)^n < x$

$$(\alpha+\varepsilon)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \varepsilon^{n-k} > \alpha^n + n\varepsilon\alpha^{n-1}$$

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1}\varepsilon < x \Rightarrow \frac{x-\alpha^n}{n\alpha^{n-1}} > \varepsilon$$

СВ-ва

$a, b > 0 \qquad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

$(\sqrt[n]{ab})^n = ab$

$$|a| = \max\{a, -a\} = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Нека $b = \sqrt[n]{a^n} \Rightarrow b^n = a^n \Rightarrow a = b$ $(a>0)$ или $b = -a$ $(a<0)$

при n-четно

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a = 0 \\ -a & a < 0 \end{cases} \qquad \sqrt[n]{a^n} = -\sqrt[n]{-(a^n)} = -(-a) = a$$

при n-нечетно

$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (\sqrt[n]{a})^n = a$

при n - нечетно и a - произволно

$a < 0 \quad a \in \mathbb{R}$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(-\sqrt[n]{-a}\right)^n = -\left(\sqrt[n]{-a}\right)^n = -(-a) = a$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \; ; \; \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{1/a} = 1$$

Редици и редове

X - множество

$f: \mathbb{N} \to X$ се нарича редица в X

$X = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$f(a_n) \quad f(a(n))$

f_n - общ член на редицата

$f: \mathbb{N} \to X \quad (f_n \in X)$

Деф

$A \in X$ е граница на редица a_n $(a_n \to A)$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ако за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M \in \mathbb{N}$ т.че за $\forall n > M$ т.че $|a_n - A| < \varepsilon$

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + A < a_n < \varepsilon + A$$

Деф

a_n е сходяща ако има граница

Деф

a_n е фундаментална ако за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.че $\forall n \geq n_0$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ е в сила $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$

II

Необходимо достатъчно условие (НДУ)
за сходимост (на Коши)

a_n е сходяща $\Leftrightarrow$ a_n е фундаментална

Ако $a_n \to \infty$ то $\frac{1}{a_n} \to 0$

Покажете че $a_n \to 0 \Leftrightarrow |a_n| \to 0$
Покажете че $a_n \to 0$ то $\frac{1}{|a_n|} \to +\infty$

Деф
$a_n \to \infty$ ако за $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.че за $\forall n > n_0$ $|a_n| > M$ (важи за $\mathbb{C}$ редица)

Деф
$a_n \to +\infty$ (a_n реална редица) за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ т.че за $\forall n > n_0$ $a_n > M$

Деф
a_n е ограничена ако $\exists M \in \mathbb{R}$ т.че $|a_n| < M$

Деф
a_n е неограничена ако за $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ т.че $|a_n| > M$